

Logique et Fondements de l'Informatique

Logique propositionnelle & Constructivisme

Pablo Donato

Leçon 2

Fondements de Rocq :

- Calcul des Constructions Inductives (CoIC)
- Extension du λ -calcul
- Logique **constructive** (intuitionniste)

L'interprétation BHK (1930) :

- Brouwer-Heyting-Kolmogorov
- Sémantique computationnelle



L.E.J. Brouwer, A. Heyting, A. Kolmogorov

Rappel : Implication ($\rightarrow$)

Introduction :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow I$$

Élimination :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow E$$

Rappel : Implication ($\rightarrow$)

Introduction (Abstraction) :

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x. M : A \rightarrow B} \rightarrow I$$

Élimination (Application) :

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash M N : B} \rightarrow E$$

Principe de détours :

Introduire puis éliminer immédiatement est redondant.

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma, x : A \vdash M : B} \rightarrow I \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : A}}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) N : B} \rightarrow E \quad \triangleright \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash M[N/x] : B}$$

- Substituer la preuve u partout où l'hypothèse x était requise dans t .
- Correspond exactement à la β -réduction du λ -calcul (semaine 2).

Conjonction ($\wedge$)

Introduction :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge I$$

Éliminations 1 & 2 :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge E_1 \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge E_2$$

Conjonction ($\wedge$)

Introduction (Paire) :

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M, N) : A \wedge B} \wedge I$$

Éliminations 1 & 2 (Projections) :

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_1 M : A} \wedge E_1 \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \wedge B}{\Gamma \vdash \pi_2 M : B} \wedge E_2$$

Conjonction : Élimination des détours

Principe de détours (β -réduction étendue) :
Introduire puis éliminer immédiatement est redondant.

Détour 1 :

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash M : A} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : B}}{\Gamma \vdash (M, N) : A \wedge B} \wedge I}{\Gamma \vdash \pi_1(M, N) : A} \wedge E_1 \triangleright \Gamma \vdash M : A$$

Détour 2 :

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash M : A} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N : B}}{\Gamma \vdash (M, N) : A \wedge B} \wedge I}{\Gamma \vdash \pi_2(M, N) : B} \wedge E_2 \triangleright \Gamma \vdash N : B$$

Disjonction ($\vee$)

Introduction 1 & 2 :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee I_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee I_2$$

Élimination :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee E$$

Disjonction ($\vee$)

Introduction 1 & 2 (Injections) :

$$\frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash \iota_1 M : A \vee B} \vee I_1 \quad \frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash \iota_2 M : A \vee B} \vee I_2$$

Élimination (Raisonnement par cas) :

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \vee B \quad \Gamma, x : A \vdash N : C \quad \Gamma, y : B \vdash P : C}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } \iota_1 x \Rightarrow N \mid \iota_2 y \Rightarrow P \text{ end} : C} \vee E$$

Disjonction : Élimination des détours

Détour 1 (le cas de gauche) :

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash M : A} \vee I_1 \quad \frac{\vdots \quad \vdots}{\Gamma, x : A \vdash N : C \quad \Gamma, y : B \vdash P : C} \vee E}{\Gamma \vdash \text{match } \iota_1 M \text{ with } \iota_1 x \Rightarrow N \mid \iota_2 y \Rightarrow P \text{ end} : C} \vee E \quad \triangleright \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash N[M/x] : C}$$

Détour 2 (le cas de droite) :

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash M : B} \vee I_2 \quad \frac{\vdots \quad \vdots}{\Gamma, x : A \vdash N : C \quad \Gamma, y : B \vdash P : C} \vee E}{\Gamma \vdash \text{match } \iota_2 M \text{ with } \iota_1 x \Rightarrow N \mid \iota_2 y \Rightarrow P \text{ end} : C} \vee E \quad \triangleright \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash P[M/y] : C}$$

L'Absurdité ($\perp$)

Introduction :

Aucune règle d'introduction.

Élimination :

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp E$$

En constructivisme, $\perp$ est défini comme le type vide (zéro constructeur).

L'Absurdité ($\perp$)

Introduction :

Aucune règle d'introduction.

En constructivisme, $\perp$ est défini comme le type vide (zéro constructeur).

Élimination (Principe d'explosion) :

$$\frac{\Gamma \vdash M : \perp}{\Gamma \vdash \text{abort}(M) : A} \perp E$$

La négation n'est pas primitive.

Définition :

$$\neg A := A \rightarrow \perp$$

- Prouver $\neg A$, c'est fournir une fonction qui transforme une preuve hypothétique de A en contradiction.
- En Rocq : `not A` n'est qu'un “sucre syntaxique” pour `A -> False`.

- **Constructivisme concret** : Chaque connecteur possède une structure de *données* ou de *contrôle* associée.
- **Syntaxe Rocq (live)** :
 - ▶ $\wedge \rightarrow$ Paire (split, destruct)
 - ▶ $\vee \rightarrow$ Type "somme" (left, right, destruct)
 - ▶ $\perp \rightarrow$ Type False sans habitant (exfalse)
 - ▶ $\neg \rightarrow$ Fonction retournant False

Passons maintenant à la pratique sur jsCoq !



A. S. Troelstra.

History of constructivism in the 20th century.

In Juliette Kennedy and Roman Kossak, editors, *Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics*, pages 150–179. Cambridge University Press, 1 edition.

URL : https://www.cambridge.org/core/product/identifier/CB09780511910616A014/type/book_part, doi:10.1017/CB09780511910616.009.